

Taller de álgebra.

Nombre del estudiante.

Octubre, 2021.

Nombre de la universidad.

Nombre de la facultad.

Nombre de la asignatura.

Desarrollo de la actividad

1. Construir una matriz 9×4 cuyas entradas contengan al menos cinco números negativos, tres números irracionales, cuatro números decimales finitos y dos números decimales infinitos periódicos. Tiene la libertad de escoger el valor de las demás entradas.

Solución:

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & -8 & -4 & -3 & \sqrt{2} & \sqrt{7} & \sqrt{3} & \frac{9}{10} \\ \frac{11}{4} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{5}{11} & \frac{11}{3} & 0 & 3 & 8 & 4 \\ 9 & 11 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 & 13 & 10 \\ 19 & 15 & 18 & 12 & 17 & 14 & 16 & 21 & 20 \end{pmatrix}$$

2. Resolver:

- a. Escribir la matriz identidad I_7 de tamaño 7×7 .

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b. Determine cuáles de las siguientes matrices son iguales:

$$\begin{pmatrix} 11 & 4 & -2i \\ 0 & 1 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.75 & 2.5 & \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 4 & -2i \\ 0 & 1 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{6}{8} & 2.55 & \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 4 & -2i \\ 0 & 1 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{6}{8} & \frac{5}{2} & \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0.75 \\ 4 & 1 & 0 & 4.5 \\ -2i & \sqrt{5} & 1 & \pi \end{pmatrix}$$

Solución:

La primera y tercera matriz son iguales:

$$\begin{pmatrix} 11 & 4 & -2i \\ 0 & 1 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.75 & 2.5 & \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 & -2i \\ 0 & 1 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{6}{8} & \frac{5}{2} & \pi \end{pmatrix}$$

3. Operaciones básicas: Considere:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular las matrices:

a. Sumas, restas y multiplicación escalar:

- $A + B$:

No es posible realizar la operación ya que la matriz B no tiene la misma dimensión que la matriz A .

- $A + C$:

Solución:

$$A + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+1 & 6+0 \\ 2+1 & 3+2 & -5+4 \\ 1+0 & -7+8 & 0+(-1) \end{pmatrix}$$

$$A + C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $B + C$:

No es posible realizar la operación ya que la matriz B no tiene la misma dimensión que la matriz C .

- $A - B$:

No es posible realizar la operación ya que la matriz B no tiene la misma dimensión que la matriz A .

- $A - C$:

Solución:

$$A - C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 & 0-1 & 6-0 \\ 2-1 & 3-2 & -5-4 \\ 1-0 & -7-8 & 0-(-1) \end{pmatrix}$$
$$A - C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -9 \\ 1 & -15 & 1 \end{pmatrix}$$

- $-7B$:

Solución:

$$-7B = (-7) * \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(-7) & (0)(-7) \\ (0)(-7) & (-1)(-7) \\ (1)(-7) & (0)(-7) \end{pmatrix}$$
$$-7B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Productos:

- AB :

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} (1)(-1) + (0)(0) + (6)(1) & (1)(0) + (0)(-1) + (6)(0) \\ (2)(-1) + (3)(0) + (-5)(1) & (2)(0) + (3)(-1) + (-5)(0) \\ (1)(-1) + (-7)(0) + (0)(1) & (1)(0) + (-7)(-1) + (0)(0) \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -7 & -3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

- AC :

Solución:

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} (1)(0) + (0)(1) + (6)(0) & (1)(1) + (0)(2) + (6)(8) & (1)(0) + (0)(4) + (6)(-1) \\ (2)(0) + (3)(1) + (-5)(0) & (2)(1) + (3)(2) + (-5)(8) & (2)(0) + (3)(4) + (-5)(-1) \\ (1)(0) + (-7)(1) + (0)(0) & (1)(1) + (-7)(2) + (0)(8) & (1)(0) + (-7)(4) + (0)(-1) \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 49 & -6 \\ 3 & -32 & 17 \\ -7 & -13 & -28 \end{pmatrix}$$

- BC :

No es posible realizar la operación ya que el número de columnas de la matriz B no es igual al número de filas de la matriz C .

- BA :

No es posible realizar la operación ya que el número de columnas de la matriz B no es igual al número de filas de la matriz A .

- CB :

Solución:

$$CB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$CB = \begin{pmatrix} (0)(-1) + (1)(0) + (0)(1) & (0)(0) + (1)(-1) + (0)(0) \\ (1)(-1) + (2)(0) + (4)(1) & (1)(0) + (2)(-1) + (4)(0) \\ (0)(-1) + (8)(0) + (-1)(1) & (0)(0) + (8)(-1) + (-1)(0) \end{pmatrix}$$
$$CB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

- CA :

Solución:

$$CA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$
$$CA = \begin{pmatrix} (0)(1) + (1)(2) + (0)(1) & (0)(0) + (1)(3) + (0)(-7) & (0)(6) + (1)(-5) + (0)(0) \\ (1)(1) + (2)(2) + (4)(1) & (1)(0) + (2)(3) + (4)(-7) & (1)(6) + (2)(-5) + (4)(0) \\ (0)(1) + (8)(2) + (-1)(1) & (0)(0) + (8)(3) + (-1)(-7) & (0)(6) + (8)(-5) + (-1)(0) \end{pmatrix}$$
$$CA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 9 & -22 & -4 \\ 15 & 31 & -40 \end{pmatrix}$$

c. Traspuestas:

- A^T :

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \\ 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

- B^T :

Solución:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- C^T :

Solución:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$
$$C^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

- $(A + C)^T$:

Solución:

$$A + C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$(A + C)^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $(AB)^T$:

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -7 & -3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$
$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

d. Combinando operaciones: $3A^T - 4C + I_3^7$, donde I_3 es la matriz identidad de tamaño 3×3

Solución:

Se tiene que la traspuesta de la matriz A es:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \\ 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$
$$3A^T = 3 * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \\ 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$
$$3A^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & -21 \\ 18 & -15 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que la matriz C es:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$
$$4C = 4 * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$
$$4C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 16 \\ 0 & 32 & -4 \end{pmatrix}$$

Se tiene que una matriz identidad de tamaño 3×3 elevada a cualquier potencia es igual a la matriz identidad:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$I_3^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^7$$

$$I_3^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente se combinan las operaciones:

$$3A^T - 4C + I_3^7 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & -21 \\ 18 & -15 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 16 \\ 0 & 32 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3A^T - 4C + I_3^7 = \begin{pmatrix} 3 - 0 + 1 & 6 - 4 + 0 & 3 - 0 + 0 \\ 0 - 4 + 0 & 9 - 8 + 1 & -21 - 16 + 0 \\ 18 - 0 + 0 & -15 - 32 + 0 & 0 - (-4) + 1 \end{pmatrix}$$

$$3A^T - 4C + I_3^7 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -37 \\ 18 & -47 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Calcular determinantes:

a.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -15 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -15 \end{vmatrix} = (4)(-15) - (5)(3) = -60 - 15$$

$$\det(A) = -75$$

b.

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (9)(0) - (-2)(0) = 0 - 0$$

$$\det(B) = 0$$

b.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se calcula el determinante de la matriz por el método del triángulo:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (5)(7)(1) + (1)(-3)(1) + (0)(0)(-1) - (1)(7)(0) - (-1)(-3)(5) - (1)(0)(1)$$

$$\det(C) = 17$$

c. ¿Existe el determinante de la matriz B del ejercicio 3?

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

No es posible calcular el determinante de la matriz B del ejercicio 3 dado que esta no cumple con el requisito del mismo número de filas que de columnas ya que es una matriz 2×3 .

5. Calcular la matriz inversa donde sea posible:

a.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se calcula el determinante de la matriz:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (2)(-4) - (5)(3) = -8 - 15 = -23$$

Se halla la matriz adjunta:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & -A_{0,1} \\ -A_{1,0} & A_{0,0} \end{pmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Se halla la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} * Adj(A)$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{23} * \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{23} & \frac{5}{23} \\ \frac{3}{23} & -\frac{2}{23} \end{pmatrix}$$

b.

$$\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se calcula el determinante de la matriz:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = (-5)(10) - (7)(-2) = -50 - (-14) = -50 + 14 = -36$$

Se halla la matriz adjunta:

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} B_{1,1} & -B_{0,1} \\ -B_{1,0} & B_{0,0} \end{pmatrix}$$

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Se halla la matriz inversa:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} * Adj(B)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{36} * \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{7}{36} \\ -\frac{1}{18} & \frac{5}{36} \end{pmatrix}$$

c.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se calcula el determinante de la matriz por el método del triángulo:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (1)(-1)(6) + (1)(5)(-1) + (-2)(3)(2) - (-1)(-1)(-2) - (2)(5)(1) - (6)(3)(1)$$

$$\det(C) = -49$$

Se halla la matriz adjunta:

$$C_{1,1} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-2} \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 * [(-1)(6) - (5)(2)] = -16$$

$$C_{1,2} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-2} \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = -1 * [(3)(6) - (5)(-1)] = -23$$

$$C_{1,3} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 1 * [(3)(2) - (-1)(-1)] = 5$$

$$C_{2,1} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{1} & 1 & \cancel{-2} \\ \cancel{3} & \cancel{-1} & \cancel{5} \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = -1 * [(1)(6) - (-2)(2)] = -10$$

$$C_{2,2} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cancel{1} & \cancel{-2} \\ \cancel{3} & \cancel{-1} & \cancel{5} \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 1 * [(1)(6) - (-2)(-1)] = 4$$

$$C_{2,3} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cancel{-2} \\ \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{5} \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = -1 * [(1)(2) - (1)(-1)] = -3$$

$$C_{3,1} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{1} & 1 & \cancel{-2} \\ 3 & -1 & 5 \\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{6} \end{pmatrix} = 1 * [(1)(5) - (-2)(-1)] = 3$$

$$C_{3,2} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cancel{1} & \cancel{-2} \\ 3 & -1 & 5 \\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{6} \end{pmatrix} = -1 * [(1)(5) - (-2)(3)] = -11$$

$$C_{3,3} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cancel{-2} \\ 3 & -1 & 5 \\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{6} \end{pmatrix} = 1 * [(1)(-1) - (1)(3)] = -4$$

$$Adj(C) = \begin{pmatrix} -16 & -23 & 5 \\ -10 & 4 & -3 \\ 3 & -11 & -4 \end{pmatrix}$$

Se calcula la traspuesta de la matriz adjunta:

$$(Adj(C))^T = \begin{pmatrix} -16 & -10 & 3 \\ -23 & 4 & -11 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Se halla la matriz inversa:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} * (Adj(C))^T$$

$$C^{-1} = -\frac{1}{49} * \begin{pmatrix} -16 & -10 & 3 \\ -23 & 4 & -11 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{16}{49} & \frac{10}{49} & -\frac{3}{49} \\ \frac{23}{49} & -\frac{4}{49} & \frac{11}{49} \\ -\frac{5}{49} & \frac{3}{49} & \frac{4}{49} \end{pmatrix}$$